PART4　2次不等式の利用

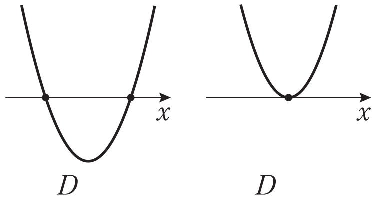
要点① 2次関数のグラフと x 軸が共有点をもつ条件

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸が共有点をもつのは，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

・x 軸と異なる2点で交わる　$\Longleftrightarrow$　D

・x 軸と1点で接する　$\Longleftrightarrow$　D

の2つの場合である。よって，次のことが成り立つ。



2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸が共有点をもつ条件

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

x 軸と共有点をもつ　$\Longleftrightarrow$　$D\geqq 0$

例　2次関数 $y=-x^2+mx-1$ のグラフが x 軸と共有点をもつときの定数 m の値の範囲を求める。

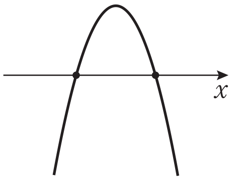
2次方程式 $-x^2+mx-1=0$ の判別式を D とすると，

$$D=m^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=m^2-4$$

グラフが x 軸と共有点をもつのは D　　のときであるから

$$m^2-4\geqq 0$$

$$(m+2)(m-2)\geqq 0$$　　よって，$m\leqq -2$，$2\leqq m$



要点② 絶対不等式

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸が共有点をもたないのは，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

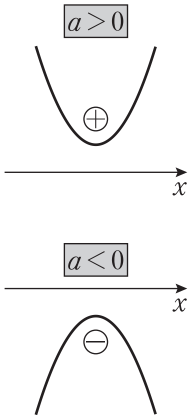
D

のときである。このとき，x^2 の係数 a について

$a>0$ のとき　常に y

$a<0$ のとき　常に y

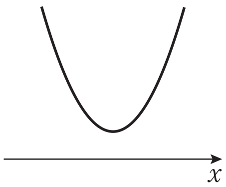
である。このことを利用して，与えられた2次不等式の解の条件から，



不等式の係数の値の範囲を求めることができる。

例　2次不等式 $x^2-2kx+2k+3>0$ の解がすべての実数であるとき，定数 k の値の範囲を求める。

2次関数 $y=x^2-2kx+2k+3$ のグラフは　　　に凸の放物線である。よって，不等式の解がすべての実数となるのは，このグラフが x 軸と　　　　　　　　　　ときである。



したがって，2次方程式 $x^2-2kx+2k+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\cdot(2k+3)$$

$k^2-2k-3<0$　　　$(k+1)(k-3)<0$　　　よって，$-1<k<3$

※ 解が「すべての実数」となる不等式，つまり

すべての実数 x について　　　　　　不等式

を「　　　　　　　　」という。

要点③　2次不等式を含む連立不等式

2次不等式を含む連立不等式についても，これまでの連立不等式と同様，連立不等式に含まれる不等式を同時に満たす x の範囲が，連立不等式の解である。

例　連立不等式 $\begin{cases} x^2+2x-3<0 \\ x^2+6x+8\geqq 0 \end{cases}$ を解く。

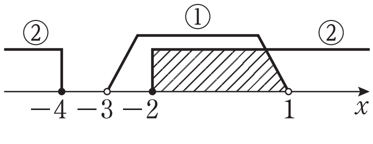
$x^2+2x-3<0$ より $(x+3)(x-1)<0$

よって　　　　　　　　……①

$x^2+6x+8\geqq 0$ より $(x+4)(x+2)\geqq 0$

よって　　　　　　　　……②

①と②の共通範囲を求めて



4

(1)　2 次関数 $y=x^2+2mx+5$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　2 次不等式 $-2x^2+kx-k<0$ の解がすべての実数のとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(3)　連立不等式 $\begin{cases} x^2-3x+2\geqq 0 \\ 2x^2-5x-3<0 \end{cases}$ を解け。

Point Pickup

2 次関数のグラフと x 軸が共有点をもつ条件

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもつ条件は　　$D\geqq 0$

2 次不等式の解がすべての実数となる条件（絶対不等式）

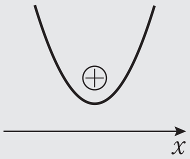
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解がすべての実数

$\iff$　$a>0$ かつ $D<0$

不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解がすべての実数

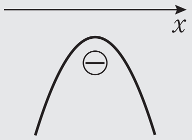
$\iff$　$a<0$ かつ $D<0$



$a>0$

かつ

$D<0$



$a<0$

かつ

$D<0$

連立 2 次不等式の解法

①　それぞれの不等式を解き，その解を数直線上に図示する。

②　図より，それぞれの解の共通範囲を求める。

第10講 PART4 確認問題

1 2次関数 $y=3x^2+ax+3$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 a の値の範囲は，

$a \leqq$ [アイ]，[ウ] $\leqq a$ である。

2 2次不等式 $-x^2+ax+a-3<0$ の解がすべての実数のとき，定数 a の値の範囲は，

[エオ] $<a<$ [カ] である。

3 連立不等式 $\begin{cases} x^2+2x-3>0 \\ 2x^2-7x-4<0 \end{cases}$ の解は，

[キ] $<x<$ [ク] である。

PART4　２次不等式の利用

4　(1)　2 次関数 $y=x^2+2mx+5$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　2 次不等式 $-2x^2+kx-k<0$ の解がすべての実数のとき, 定数 k の値の範囲を求めよ。

(3)　連立不等式 $\begin{cases} x^2-3x+2 \geqq 0 \\ 2x^2-5x-3<0 \end{cases}$ を解け。

[解答]

(1)　2 次方程式 $x^2+2mx+5=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=m^2-1\cdot5=m^2-5$$

グラフが x 軸と共有点をもつのは $D \geqq 0$ のときであるから

$$m^2-5 \geqq 0$$

よって　$m \leqq -\sqrt{5}$，$\sqrt{5} \leqq m$

(2)　2 次関数 $y=-2x^2+kx-k$ のグラフは上に凸の放物線である。よって，不等式の解がすべての実数となるのは，このグラフが x 軸と共有点をもたないときである。

したがって，2 次方程式 $-2x^2+kx-k=0$ の判別式を D とすると

$$D=k^2-4\cdot(-2)\cdot(-k)=k^2-8k=k(k-8)<0$$

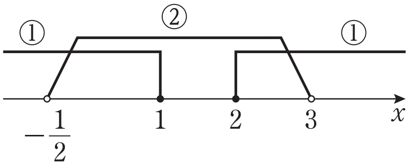
よって　$0<k<8$

(3)　$x^2-3x+2 \geqq 0$ より $(x-1)(x-2) \geqq 0$　　よって　$x \leqq 1$，$2 \leqq x$　……①

$2x^2-5x-3<0$ より $(2x+1)(x-3)<0$　　よって $-\frac{1}{2}<x<3$　……②

①と②の共通範囲を求めて

$$-\frac{1}{2}<x \leqq 1,\ 2 \leqq x<3$$



第10講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-6，ウ：6

[解説]

2 次方程式 $3x^2+ax+3=0$ の判別式を D とすると，

$$D=a^2-4\cdot3\cdot3=a^2-36$$

グラフが x 軸と共有点をもつのは $D\geqq0$ のときであるから，[A]

$$a^2-36\geqq0$$

$$(a+6)(a-6)\geqq0$$

よって，$\boldsymbol{a\leqq-6,\ 6\leqq a}$

[A]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもつ
$\iff$　$D=b^2-4ac\geqq0$

2

[正解] エオ：-6，カ：2

[解説]

2 次関数 $y=-x^2+ax+a-3$ のグラフは上に凸の放物線である。よって，不等式の解がすべての実数となるのは，このグラフが x 軸と共有点をもたないときである。

2 次方程式 $-x^2+ax+a-3=0$ の判別式を D とすると，

$$D=a^2-4\cdot(-1)\cdot(a-3)$$

$$=a^2+4a-12$$

$$=(a-2)(a+6)$$

グラフが x 軸と共有点をもたない条件は $D<0$ であるから，[B]

$$(a-2)(a+6)<0$$

よって，$\boldsymbol{-6<a<2}$

[B]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもたない
$\iff$　$D=b^2-4ac<0$

3 [正解] キ：1，ク：4

[解説]

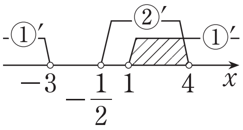
$$\begin{cases} x^2+2x-3>0 & \cdots\cdots① \\ 2x^2-7x-4<0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①より，$(x+3)(x-1)>0$ [C]

$x<-3$，$1<x$　……①′

②より，$(2x+1)(x-4)<0$

$-\dfrac{1}{2}<x<4$　……②′



①′ と ②′ の共通範囲を求めて，

$1<x<4$

[C]　それぞれの不等式を解く。